CERTIFICAZIONE PEDAGOGICA EUROPEA SULLE TIC

PROGETTO DIDATTICO – MODULO 04

Studio di una funzione

Gruppo LIMTIC

Annalisa Di Gaeta, Sante Cascella, Mirella La Motta
Calogera Oddo, Giuseppe Siragusano, Sandra Troia

Generalità

Studiare una funzione significa determinarne le proprietà ovvero

- Il dominio.
- Il segno.
- Gli intervalli in cui cresce o decresce.
- Minimi e massimi relativi.
- Gli intervalli in cui è concava o convessa.
- I flessi.
- Gli asintoti.

Dominio della funzione

Per ricercare il dominio della funzione $f(x)$ bisogna prima classificare la funzione stessa e in base alle sue caratteristiche ricercare il campo di esistenza.

Dominio della funzione

- Ad esempio, se $f(x)$ è razionale intera il dominio è R.
- Se è razionale fratta occorre trovare gli zeri a, b, … del denominatore. Il dominio è allora $R-\{a, b, \ldots\}$.
- Se la funzione è irrazionale algebrica per ogni radicale di indice pari bisogna imporre la non negatività del radicando.
- Se è logaritmica è necessario che l’argomento sia positivo.

Segno della funzione

Studiare il segno della funzione significa determinare in quali intervalli il suo grafico è situato al di sopra o al di sotto dell'asse delle x.

Segno della funzione

- Bisogna risolvere la disequazione
$$f(x)>0$$
per individuare gli intervalli di positività della funzione.
- Le soluzioni della disequazione
$$f(x)<0$$
individuano gli intervalli di negatività della funzione.

Intersezioni con gli assi

Risolvendo l'equazione

$$f(x)=0$$

si individuano gli eventuali punti di intersezione del grafico con l'asse delle x (zeri della funzione *f(x)*).

Intersezioni con gli assi

Ponendo

$x=0$ (se $f(x)$ è ivi definita)

si trova invece l'eventuale punto di intersezione del grafico con l'asse delle y.

Massimi e minimi relativi

Per trovare i massimi e i minimi relativi di una funzione $f(x)$, derivabile nei punti interni del suo dominio, si possono utilizzare due metodi.

Massimi e minimi relativi

Primo metodo

Si calcola $f'(x)$ e se ne studia il segno.

- Negli intervalli in cui $f'(x)>0$ la funzione data è crescente.
- Negli intervalli in cui $f'(x)<0$ la funzione è decrescente.

Massimi e minimi relativi

- Se per $x<a$ la funzione è crescente e per $x>a$ la funzione è decrescente, allora in $x=a$ c'è un punto di massimo relativo.
- Se invece la decrescenza precede la crescenza, allora $x=a$ è un punto di minimo relativo.

Massimi e minimi relativi

- Si calcola infine il valore del minimo o massimo trovato sostituendo il numero reale a alla variabile x nell’espressione della funzione.

Massimi e minimi relativi

Secondo metodo

- Se $f(x)$ è dotata di $f'(x)$ e $f''(x)$ continue in a, allora la funzione ha un minimo relativo nel punto considerato se

$$f'(a) = 0 \text{ e } f''(a)>0.$$

- Se si verifica invece

$$f'(a)=0 \text{ e } f''(a)<0$$

la funzione ha un massimo relativo in a.

Concavità e convessità

- Se si verifica

  $$f''(a)>0$$

  la funzione è concava (ha concavità rivolta verso l'alto).
- Se si verifica invece

  $$f''(a)<0$$

  la funzione è convessa (ha concavità rivolta verso il basso).

Punti di flesso

Per trovare i flessi di una funzione *f(x)*, derivabile nei punti interni del suo dominio, si procede in modo analogo a quello già visto per la determinazione di minimi e massimi relativi.

Punti di flesso

Primo metodo

- Se in *x*=*a* si ha il passaggio dalla concavità alla convessità e *a* appartiene al dominio allora in tale punto si ha un flesso discendente.
- Se invece la convessità precede la concavità allora si ha un flesso ascendente.

Punti di flesso

Secondo metodo

Si determinano le radici *a* dell'equazione $f''(x)=0$.

- Si ha un flesso in $x=a$ solo se la prima derivata, successiva alla seconda, che non si annulla in *a* è di ordine dispari. In tal caso se in *a* si annulla la derivata prima il flesso è a tangente orizzontale.
- Altrimenti è un flesso a tangente obliqua.

Asintoti (1)

Asintoti verticali

- Se il dominio della funzione è del tipo
  $R-\{a, b, c, \dots\}$
  bisogna calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to a$.
- Se questo limite è infinito allora c'è l'asintoto verticale di equazione $x=a$.
- Si ripete il calcolo per gli altri punti b, c, … nei quali la funzione non è definita.

Asintoti (2)

- Si procede in modo analogo se il dominio di *f(x)* è un'unione di intervalli e in qualche estremo inferiore o superiore di tali intervalli la funzione non è definita.

Asintoti (3)

Asintoti orizzontali

- Se il limite di $f(x)$, per $x \to +\infty$, è il numero finito l, allora c'è l'asintoto orizzontale di equazione

$$y=l.$$

- Se tale limite è invece infinito si passa all'esame dell'eventuale asintoto obliquo.
- Analogamente per $x \to -\infty$.

Asintoti (4)

Asintoti obliqui

- Se il limite di $f(x)/x$, per $x \to +\infty$, è infinito non c'è neppure l'asintoto obliquo.
- Se invece tale limite è il numero finito m allora si calcola il limite di $f(x)-mx$. Solo se anche questo limite è un numero finito q possiamo dire che esiste, per $x \to +\infty$, un asintoto obliquo. La sua equazione è $y=mx+q$.
- Analogamente per $x \to -\infty$.